

Mateusz Wajzer

ORCID: 0000-0002-3108-883X

Modele matematyczne w politologii – podstawy teoretyczne i przykłady użycia

SŁOWA KLUCZOWE:

modele matematyczne, politologia, analiza regresji, teoria gier

Czym są modele naukowe?

Pojęcie modelu zdefiniować możemy, za Dietrichem Dörnerem, jako replikację wycinka rzeczywistości, jego kopię¹. Zatem między danym w doświadczeniu fragmentem rzeczywistości (systemem empirycznym² bądź składającymi się nań obiektami³) S i jego modelem M (lub jego modelami M_i) zachodzi następująca relacja: M jest modelem S (lub M_i są modelami S). Pierwowzór (badany obiekt) znajduje odbicie w homomorficznym odwzorowaniu (modelu). Tym samym modele stanowią zredukowane i zdeformowane kopie oryginałów. Odznaczają się więc wysokim stopniem podobieństwa, jednak nigdy identycznością, gdyż zupełna zgodność poszczególnych elementów i cech czyniłaby budowę modeli bezcelową⁴.

¹ D. Dörner, *Modellbildung und Simulation*, [w:] E. Roth (red.), *Sozialwissenschaftliche Methoden*, München 1984, s. 337.

² Odwołujemy się tutaj do siatki pojęciowej rozwijanej w ramach teorii systemów.

³ Z uwagi na podjęte rozważania w zakres terminu „obiekt” włączone zostaną również zjawiska społeczne, ekonomiczne i polityczne, zarówno te powtarzalne w czasie i przestrzeni, jak i te jednostkowe, czyli zdarzenia.

⁴ E. Nikitin, *Wyjaśnianie jako funkcja nauki*, przeł. S. Jędrzejewski i Z. Simbierowicz, Warszawa 1975, s. 60–61.

Budując modele naukowe, przyjmujemy ściśle określone zbiory kontrfaktycznych założeń idealizujących. Nie są one jednak dane raz na zawsze. W toku postępów badawczych modele mogą ulegać konkretyzacji przez stopniowe uwzględnianie w nich pominiętych wcześniej parametrów rzeczywistych. Dzieje się tak zwłaszcza wówczas, gdy pojawiają się zbyt duże rozbieżności między wynikami teoretycznymi wyprowadzonymi z modelu a danymi empirycznymi. W znacznie szerszym ujęciu, modelowanie naukowe potraktować należy jako istotną aktywność wiedzotwórczą w procesie tworzenia oraz rozwijania teorii. „Konstrukcja teorii – zgodnie z idealizacyjną koncepcją nauki – polega na budowie podstawowego, czyli najbardziej uproszczonego modelu, który obejmuje grupę wzajemnie w szczególny sposób powiązanych praw idealizacyjnych, ujawniając w czystej postaci to, co uznaje się w danym czasie za system podstawowych związków w obserwowanych zjawiskach. Następnie założenia te są kolejno odrzucane, a wyjściowy model zostaje poszerzany (konkretyzowany), tak aby ujmował on coraz więcej z bogactwa zjawisk i dawał coraz lepsze przybliżenie do zarejestrowanych faktów. Seria takich coraz bardziej skonkretyzowanych modeli wychodzących od modelu podstawowego to teoria idealizacyjna. Zostaje ona zaakceptowana, jeśli wyjaśnia wiele znanych faktów badanej dziedziny zjawisk z dostatecznym przybliżeniem”⁵.

Pewnych wyobrażeń o procedurze uchylania kolejnych założeń idealizujących dostarczają prace Isaaca Newtona nad układem planetarnym. Pierwotnie autor *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) opracował model zawierający jedynie nieruchome Słońce oraz jedną planetę, traktowane jako punkty materialne. Wprawdzie model ten umożliwił mu wyprowadzenie prawa odwrotnych kwadratów dla przypadku elipsy Keplera, jednak pozostawał w sprzeczności z trzecim prawem dynamiki. Owa teoretyczna trudność wymusiła takie przekształcenie, w którym Słońce i planeta obracały się wokół ich wspólnego ośrodka masy. Następnie Newton zbudował model dla większej liczby planet, zmieniając również ich status ontyczny – z punktów materialnych stały się obdarzonymi masą kulami itd.⁶. Innego przykładu konkretyzacji – tym razem z obszaru nauk społecznych – dostarczają badania Williama

⁵ L. Nowak, *O ukrytej jedności nauk społecznych i nauk przyrodniczych*, „Nauka” 1998, nr 1, s. 7–8.

⁶ I. Lakatos, *Pisma z filozofii nauk empirycznych*, przeł. W. Sady, Warszawa 1995, s. 77–78.

H. Rikera i Petera C. Ordeshooka⁷. Sformalizowali oni i uszczegółowili model racjonalnego wyboru Anthony'ego Downsa⁸, który pierwotnie nie wyjaśniał przyczyn uczestnictwa w głosowaniu sporych części demokratycznych społeczeństw. Fakt ten stanowił niemały problem dla teorii, szczególnie jeśli wziąć pod uwagę niewielki wpływ pojedynczego głosu na wynik wyborczy przy jednocześnie względnie wysokich kosztach uczestnictwa (paradoks głosowania). Oto model wyjściowy (1) i jego konkretyzacja (2):

$$R = BP - C, \quad (1)$$

$$R = BP - C + D. \quad (2)$$

Finalnie otrzymano formułę, zgodnie z którą racjonalny wyborca bierze pod uwagę spodziewane korzyści związane z konkretnym wynikiem wyborów (B), pomnożone przez prawdopodobieństwo oddania głosu decydującego o tym wyniku (P), pomniejszone następnie o poniesione koszty uczestnictwa (C) oraz powiększone o przeświadczenie, że głosowanie jest obowiązkiem obywatelskim (D).

W powyższych przykładach była mowa o modelach zbudowanych ze znaków wyrażających określone symbole lub pojęcia, a więc o strukturach abstrakcyjnych, zwanych również idealnymi bądź teoretycznymi. Oprócz modeli zdefiniowanych w którymś z języków struktur syntaktycznych, istnieją także modele materialne charakteryzujące się podobieństwem pod względem konkretnych właściwości, np. pod względem parametrów geometrycznych, parametrów statycznych czy parametrów kinematycznych⁹. Ów fundamentalny podział w oparciu o kryterium ontyczne bywa w literaturze z zakresu metodologii nauk uszczegółowiany. I tak, Adam Grobler¹⁰ wyróżnia trzy typy modeli:

- 1) symulacyjne – obiekt modelowany zostaje zastąpiony ze względu na kalkulacje ekonomiczne i (lub) przesłanki etyczne bądź ze względu na bariery fizyczne i technologiczne w badaniu procesów wielkoskalowych. Jako przykłady posłużyć mogą testy zderzeniowe samochodów, w których żywi pasażerowie zastępowani są manekinami, oraz symu-

⁷ W. H. Riker, P. C. Ordeshook, *A theory of the calculus of voting*, „The American Political Science Review” 1968, nr 1, s. 25–42.

⁸ A. Downs, *An Economic Theory of Democracy*, New York 1957.

⁹ S. Pabis, *Metodologia i metody nauk empirycznych*, Warszawa 1985, s. 71–89.

¹⁰ A. Grobler, *Metodologia nauk*, Warszawa 2006, s. 175–178.

lacje komputerowe powstawania i ewolucji gwiazd, planet, układów planetarnych, galaktyk;

- 2) ikoniczne – reprezentacja badanego obiektu ulega redukcji jedynie pod względem wybranych cech, np. skali. Pracownie geograficzne są pełne wzmiankowanych konstruktów, tj. map i globusów naśladujących wyselekcjonowane właściwości pierwowzorów;
- 3) metamatematyczne lub semantyczne – modelowaniu w tym przypadku podlega język, w którym wyrażona jest rozpatrywana teoria¹¹.

Rzecz jasna, natura zjawisk politycznych nie wymaga od politologów budowania modeli materialnych. Z tego względu szczególne zainteresowanie, zwłaszcza politologicznej refleksji metanaukowej, powinno być zwrócone w stronę modeli abstrakcyjnych¹². Stefan Nowak dzieli tego typu konstrukty na: strukturalne i funkcjonalne. Ta dwuelementowa typologia wskazuje na trzy składowe metody naukowej w jej elementarnej postaci: deskrypcję, eksplanację oraz predykcję. Rozpoznanie wewnętrznej struktury danego systemu, jak zauważa polski metodolog, może być celem samym w sobie bądź może stanowić jedynie krok zbliżający do budowy modeli umożliwiających wyjaśnianie, a także przewidywanie interesujących nas procesów czy zdarzeń¹³.

Modele abstrakcyjne tworzone są, o czym wspomniano już wcześniej, ze sformalizowanego układu znaków wyrażających symbole lub pojęcia, a w konsekwencji – związki między nimi. Najczęściej stosowanym, a także najbardziej efektywnym językiem formalnym w procesie ich konstruowania jest język matematyki.

¹¹ Typologia Groblera, uwzględniająca dodatkowo tak statyczne ujęcie modelu, jak i ujęcie dynamiczne, jest w kilku punktach zbieżna z propozycją Klausa G. Troitzscha. Niemiecki socjolog wyszczególnia następujące typy modeli: realne (np. modele zwierzęce wykorzystywane w medycynie), ikoniczne (np. modele kolejek elektrycznych), werbalne (języki naturalne) i formalne (któryś z języków formalnych bądź jego składowa, np. układ równań różniczkowych). K. G. Troitzsch, *Modellbildung und Simulation in den Sozialwissenschaften*, Opladen 1990, s. 12–13.

¹² W krajach anglosaskich, w których politologia jest o wiele bliższa wzorcowi epistemologicznemu nauk przyrodniczych, tematyka ta cieszy się pewnym zainteresowaniem. Zob. M. P. Fiorina, *Formal models in political science*, „American Journal of Political Science” 1975, nr 1, s. 133–159; P. E. Johnson, *Formal theories of politics: The scope of mathematical modelling in political science*, „Mathematical and Computer Modelling” 1989, nr 4–5, s. 397–404.

¹³ S. Nowak, *Metodologia badań społecznych*, Warszawa 2008, s. 446.

Modele matematyczne

Modelem matematycznym badanego obiektu nazywać będziemy „dowolne relacje matematyczne, jeśli takie istnieją między elementami zbioru zmiennych związanych z [tym – M. W.] obiektem”¹⁴. Relacje matematyczne przedstawiane są zazwyczaj przy użyciu funkcji, operatorów algebraicznych czy operatorów różniczkowych. Ich identyfikacja jest celem szeregu czynności badawczych podejmowanych w toku analiz. W zależności od przyjętego kryterium modele matematyczne podzielić można na:

- 1) modele liniowe i modele nieliniowe – kluczową rolę w procesie klasyfikacji odgrywa warunek liniowości operatorów na analizowanym zbiorze wartości; jeśli jeden z operatorów go nie spełnia, to model ma charakter nieliniowy;
- 2) modele deterministyczne i modele stochastyczne – przynależność do danej klasy podyktowana jest stopniem wiedzy o elemencie losowym; o modelu deterministycznym mówimy wtedy, gdy dla każdego zbioru wartości wielkości wejściowych istnieje ściśle określona odpowiedź, w przeciwnym wypadku mamy do czynienia z modelem stochastycznym¹⁵;
- 3) modele statyczne i modele dynamiczne – kryterium umożliwiającym rozróżnienie jest zachodzenie zmian w czasie; modele statyczne opisują procesy w stanach ustalonych, dynamiczne – w stanach nieustalonych;
- 4) modele o parametrach skupionych i modele o parametrach rozłożonych – pod uwagę brany jest zakres zmian zmiennych; w modelach o parametrach skupionych istotne zmienne procesu stanowią tylko funkcję czasu, a w modelach o parametrach rozłożonych podlegają one zmianom tak w czasie, jak i w przestrzeni lub wyłącznie w przestrzeni, ale wielowymiarowej¹⁶.

Dyskusje na temat zasadności stosowania modeli matematycznych w badaniach politologicznych nasiliły się wraz z rozwojem ilościowych metod gromadzenia i przetwarzania danych. Zainicjowane pod wpływem rewolucji behawioralnej dążenia do budowy dyscypliny nieróżniące się zasadniczo pod względem metodologicznym od nauk przyrodniczych

¹⁴ A. Muciek, *Wyznaczanie modeli matematycznych z danych eksperymentalnych*, Wrocław 2012, s. 16.

¹⁵ Modele wyznaczone na podstawie danych obserwacyjnych mają charakter probabilistyczny. O stanie tym decyduje zachodzenie błędów w pomiarach.

¹⁶ A. Muciek, *Wyznaczanie modeli matematycznych...*, s. 17–18.

spotkały się (i nadal spotykają) ze sprzeciwem badaczy akcentujących szczególnie mocno osobliwość ontologiczną przedmiotu badań nauk społecznych. W ich opinii, różnice między obdarzonymi świadomością i wolą ludźmi a mechanistyczno-przyczynową przyrodą skutkują doniosłymi konsekwencjami metodologicznymi. W związku z tym metodami właściwymi w badaniach świata ludzkiego są interpretacja i rozumienie, przyroda zaś podlega wyjaśnianiu i prognozowaniu. Nie wdając się w zbyt długą polemikę z tym – jakże dyskusyjnym – poglądem, zwróćmy uwagę na zbieżność metod poznawczych użytych do tworzenia oraz konkretyzowania modeli Newtona oraz Downsa. W istocie bowiem „metody stosowane w różnych dziedzinach nauki polegają na realizacji tych samych wymogów metodologicznych: myślowego upraszczania przedmiotu badań; ustalania hipotetycznych związków w ramach uproszczonego systemu; stopniowego modyfikowania i komplikowania tych związków, tak by w przybliżeniu imitowały prawidłowości empiryczne. Wymogi te – abstrakcyjnej rekonstrukcji (nie zaś uogólniania obserwacji) świata rzeczywistego – są same związane z tak abstrakcyjnymi własnościami procedur poznawczych, że procedury te pozostają te same niezależnie od tego, czy stosowane są do cząstek elementarnych, populacji biologicznych, gospodarujących ludzi czy ludzi komunikujących się ze sobą”¹⁷.

W literaturze politologicznej – podobnie zresztą jak w literaturze z zakresu innych nauk społecznych, co sygnalizowano już w poprzednim akapicie – pogląd, jakoby osobliwa ontologia danej dziedziny determinowała równie osobliwą metodologię tworzenia teorii tej dziedziny, objawia się, między innymi, nader częstym podkreśleniem niewystarczalności, a w skrajnych wypadkach – nieodpowiedniości metod matematycznych w badaniach zjawisk politycznych¹⁸. W rzeczywistości jednak matematyzacja teorii dostarcza wielu niezaprzeczalnych korzyści, oczywiście przy założeniu, że poziom zaawansowania teoretycznego i metodologicznego danej dyscypliny czy subdyscypliny umożliwia badania naukowe postulowanych obiektów¹⁹ oraz że nie mamy do czynienia jedynie z bezproduktywnym poznawczo przejawem fetyszyzacji matematyki bądź, co gorsze, z próbą maskowania własnej niewiedzy i bezradności wobec rozpatry-

¹⁷ L. Nowak, *O ukrytej jedności nauk...*, s. 18.

¹⁸ Zob. na ten temat: B. Krauz-Mozer, *Teorie polityki. Założenia metodologiczne*, Warszawa 2005, s. 39–46.

¹⁹ Jeszcze do niedawna sfera emocji oraz uczuć stanowiła wyłączną domenę filozofii. Dziś, wraz z rozwojem metod neuroobrazowania, zjawiska te stają się z powodzeniem przedmiotem badań neuronauki.

wanych zagadnień²⁰. Wśród tych korzyści należy wymienić: 1) jednoznaczność wypowiedzi – formalizacja usuwa dowolność interpretacyjną; 2) standaryzację terminologii i metod – formalizacja sprzyja komunikacji między dyscyplinami, stając się jednym z kluczowych ogniw tendencji unitarystycznych; 3) ogólność – formalizacja usuwa z teorii elementy nieistotne bądź wynikające z lokalnych uwarunkowań; 4) obiektywność – formalizacja podnosi poziom obiektywności teorii; cecha ta jest istotna zwłaszcza dla dyscyplin, w których toczą się zaciekle spory o znaczenie podstawowych pojęć; 5) selektywność założeń – dzięki formalizacji wyodrębnieniu podlegają założenia o znaczeniu zasadniczym dla teorii (wskazujące na zjawiska i problemy konstytuujące dziedzinę teorii); 6) minimalność założeń – formalizacja pozwala na obiektywną analizę założeń koniecznych do sformułowania teorii²¹.

W dalszej części artykułu zaprezentowano wybrane przykłady użycia modeli matematycznych w badaniach zjawisk politycznych. Z uwagi na ograniczoną objętość publikacji skoncentrowano się na modelach regresyjnych (jednej z klas modeli stochastycznych) oraz na modelach teoriogrowych (rodzaj modelu determinować będzie przyporządkowanie do odpowiedniej klasy).

Przykład – modele regresyjne

Powszechnie stosowaną metodą w budowie modeli matematycznych jest analiza regresji. Pozwala ona na badanie zależności między zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi, predykcję wartości zmiennej objaśnianej przy zadanych wartościach zmiennych objaśniających oraz wskazanie wartości zmiennych istotnie wpływających na zmienną objaśnianą. Czyniąc kryterium podziału postać funkcji $f(X, \beta)$, można wyróżnić regresję liniową oraz regresję nieliniową. Najczęściej używanymi modelami regresyjnymi są modele opisujące zależności liniowe. Jednak nie wszystkie związki między badanymi cechami będą mieć charakter liniowy. W takich sytuacjach do danych empirycznych dopasowuje się krzywą najlepiej opisującą obserwowany rozrzut wartości. Modele nieliniowe buduje się zatem z myślą o konkretnych przypadkach, stosując odpowiednio dobrane funkcje matematyczne. Poniżej przeanalizowano

²⁰ Zob. np.: S. Andreski, *Czarnoksiężstwo w naukach społecznych*, przeł. S. Andreski, J. Sowa, Warszawa 2002, s. 129–150; J. Sztumski, *Wstęp do metod i technik badań społecznych*, Katowice 2005, s. 84–85.

²¹ P. Suppes, *The desirability of formalization in science*, „The Journal of Philosophy” 1968, nr 65, s. 654–656.

nieliniowe modele dynamiki wzrostu światowej populacji oraz dynamiki wzrostu realnego światowego PKB.

W 1960 roku Heinz von Foerster, Patricia M. Mora oraz Lawrence W. Amiot opublikowali w «Science» artykuł²², w którym wykazali, że tempo wzrostu światowej populacji w okresie od 1 do 1958 roku może zostać bardzo dobrze opisane równaniem:

$$N_t = \frac{C}{t_0 - t}, \quad (3)$$

gdzie N_t oznacza wielkość populacji w czasie t , C i t_0 są stałymi, przy czym t_0 odpowiada bezwzględnemu limitowi (ang. 'singularity' point), w którym N stanie się nieskończona. Wartość współczynnika t_0 została oszacowana na 2026,87, co pozwoliło autorom wyznaczyć dzień, w którym rozwiązanie równania „eksploduje”. Będzie to piątek, 13 listopada 2026 roku²³.

Chwytny marketingowo tytuł tekstu von Foerstera i współpracowników – *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026* – nie wieszczył w żadnym wypadku końca świata, tylko wskazywał, że adekwatny dla stuleci hiperboliczny model wzrostu wielkości światowej populacji będzie musiał ulec transformacji w inny model. Bardzo szybko, bo już w latach 70. XX wieku, konieczność taką zaczęły potwierdzać dane empiryczne. Wystarczy zauważyć, że jeszcze w 1900 roku populacja świata liczyła 1 miliard 625 milionów ludzi. Na podwojenie się tej wielkości trzeba było czekać do połowy lat 60. Jednak od tego czasu dynamika wzrostu liczebności społeczeństw ludzkich znacznie przyspieszyła. W połowie lat 70. na Ziemi zamieszkiwały już ponad 4 miliardy ludzi, w końcowej fazie lat 80. ponad 5 miliardów, na przełomie wieków przybył kolejny miliard. We wrześniu 2018 roku wielkość światowej populacji oscylowała w granicach 7 miliardów 523 milionów ludzi²⁴.

Dzięki pracom rosyjskich badaczy skupionych wokół czasopisma «Social Evolution and History» oraz wydawnictwa Uchitel Publishing House dowiadujemy się, że odpowiednio przekształcony model von Foerstera może być stosowany do analiz innych zjawisk, np. dynamiki wzrostu światowego PKB

²² H. von Foerster, P. M. Mora, L. W. Amiot, *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026*, „Science. New Series” 1960, nr 132 (3436), s. 1291–1295.

²³ Ustalenie to wynika z prostego obliczenia: $365 \cdot 87\% = 317,55$. Wystarczy teraz sprawdzić kalendarz na rok 2026, aby odczytać datę 317 dnia roku. Będzie nim właśnie piątek, 13 listopada.

²⁴ C. McEvedy, R. Jones, *Atlas of World Population History*, London 1979, s. 343–351; U.S. Census Bureau, *World Population 1950–2050*, https://www.census.gov/population/international/data/worldpop/table_population.php (dostęp: 06.01.2019).

w okresie od 1 do 1973 roku²⁵. Korzystając z danych oszacowanych przez Jamesa Bradforda DeLonga²⁶, zbudujemy model kształtowania się poziomu realnego światowego PKB, jednak w znacznie dłuższym szeregu czasowym. Rozpatrzmy okres od 10 000 roku p.n.e. do 2000 roku n.e.

W analizach posłużymy się równaniem (3) w wersji kwadratowo-hiperbolicznej:

$$P_t = \frac{C}{(t_0 - t)^2}, \quad (4)$$

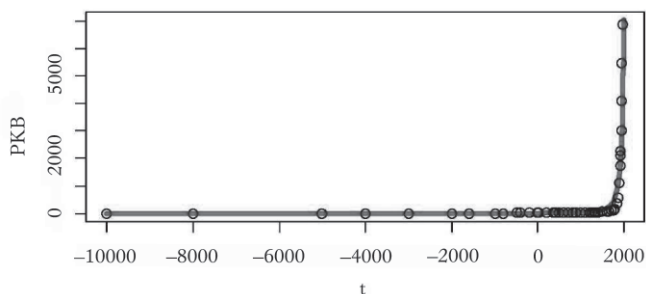
gdzie P_t oznacza wielkość realnego światowego PKB w czasie t , C i t_0 są stałymi, przy czym t_0 odpowiada bezwzględnemu limitowi, w którym P będzie dążyć do nieskończoności.

Po sprowadzeniu modelu (4) do postaci liniowej oraz po wstępnym zdefiniowaniu zbioru argumentów, zbioru wartości oraz samego modelu wyznaczono wartości stałych: $\hat{C} = 44346382,39$ i $\hat{t}_0 = 2079,48$. Finalnie, otrzymano model w postaci:

$$\hat{P} = \frac{44346382,39}{(2079,48 - t)^2}. \quad (5)$$

Jego graficzną reprezentację zawiera poniższy rysunek.

Rysunek 1. Dynamika wzrostu realnego światowego PKB, 10 000 rok p.n.e. – 2000 rok n.e. (w miliardach dolarów międzynarodowych po kursie z 1990 roku)



$R^2 = 0,9599$; $p = < 2,2e - 16$. Wykres wykonano przy użyciu programu R.

Źródło: opracowanie własne.

²⁵ L. E. Grinin, A. V. Markov, A. V. Korotayev, *Mathematical modeling of biological and social evolutionary macro trends*, [w:] L. E. Grinin, A. V. Korotayev (red.), *History and Mathematics: Trends and Cycles*, Volgograd 2014, s. 24–25.

²⁶ J. B. DeLong, *Estimates of World GDP, One Million B.C. – Present*, 1998, http://delong.typepad.com/print/20061012_LRWDGDP.pdf (dostęp: 06.01.2019).

Hiperboliczna i kwadratowo-hyperboliczna natura modeli opisujących dynamikę wzrostu światowej populacji oraz dynamikę wzrostu realnego światowego PKB nie ma w żadnym razie charakteru koincydencyjnego. Antropolodzy kulturowi upatrują jej przyczyn w drugim nieliniowym dodatnim sprzężeniu zwrotnym między wzrostem demograficznym, wzrostem technologicznym a wzrostem ekonomicznym²⁷. Politolodzy z kolei, patrząc na omawianą problematykę z perspektywy przedmiotu poznania własnej dyscypliny, mogą uwzględnić dodatkowo czynnik o równie istotnym, jeśli nie istotniejszym, znaczeniu, tj. intensyfikację mobilizacji politycznej, szczególnie odczuwalną w drugiej połowie XX wieku, czyli w czasie konfrontacji ideologicznej mocarstw uwikłanych w zimną wojnę. Charakterystyczne dla tego okresu pozyskiwanie i przetwarzanie zasobów na niespotykaną dotąd skalę, którym wyraz dać może chociażby realizacja programów „Łuna” i „Apollo”, doprowadziły do dalekosiężnych przekształceń środowiska naturalnego²⁸ oraz do poważnych przeobrażeń społecznych²⁹.

Przykład – modele teoriogrowe

Teoria gier jest jedną z podstawowych metod naukowej analizy zjawisk politycznych. Z grubsza można ją podzielić na klasyczną teorię gier i teorię gier ewolucyjnych. W ramach pierwszego działu najistotniejszym pojęciem jest równowaga Nasha. Opisuje ona sytuację, w której żadnemu z graczy nie kalkuluje się zmiana strategii, jeśli inni uczestnicy gry postanowią pozostać przy swoich wyborach. Zbliżonym pojęciem teorii gier ewolucyjnych jest strategia ewolucyjnie stabilna (ESS). Jeśli ESS „stosuje” cała populacja, to każda niewielka grupa mutantów (osobników urodzonych z nowymi cechami fenotypowymi) bądź migrantów (przybyszów z zewnątrz) zostanie z dużym prawdopodobieństwem z popu-

²⁷ A. V. Korotayev, L. E. Grinin, *Global urbanization and political development of the world system*, [w:] L. E. Grinin, I. Ilyin, A. V. Korotayev (red.), *Globalistics and Globalization Studies*, Moscow–Volgograd 2012, s. 30–32.

²⁸ Antropogeniczne pochodzenie milionów ton metali, plastików, betonu, sadzy, środków owadobójczych czy materiałów promieniotwórczych zalegających w osadach lądowych i oceanicznych skłania dzisiaj Międzynarodową Komisję Stratygraficzną do dyskusji na temat zasadności wyznaczenia nowej epoki geologicznej – antropocenu.

²⁹ Gwałtowne przyśpieszenie rozwoju cywilizacyjnego właściwe dla drugiej połowy XX wieku wpłynęło wydatnie na długość życia naszego gatunku. Jeszcze w 1950 roku oczekiwana długość życia w chwili narodzin, bez podziału na płeć i zamieszkiwany kontynent, wynosiła 50 lat. W 2015 roku było to już 71 lat. Dane Gapminder, 2018, <https://www.gapminder.org> (dostęp: 06.01.2019).

lacji wyeliminowana. Równie istotną koncepcją teorii gier ewolucyjnych jest dynamika replikatorów. Umożliwia ona śledzenie zmian względnych częstości występowania poszczególnych strategii w populacji. Równanie standardowej dynamiki replikatorów³⁰ przyjmuje następującą postać:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)[U_A(t) - \bar{U}(t)], \quad (6)$$

gdzie $x(t)$ oznacza odsetek populacji grający strategię A w czasie t , $U_A(t)$ oznacza przystosowanie, jakie daje gra strategią A w czasie t , natomiast $\bar{U}(t)$ to średnie przystosowanie całej populacji w czasie t .

W analizach zastosujemy konkretyzację standardowej dynamiki replikatorów – dynamikę replikatorów Maynarda Smitha³¹ o równaniu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(t)[U_A(t) - \bar{U}(t)]}{\bar{U}(t)}. \quad (7)$$

Biorąc pod uwagę procesy zachodzące w pojedynczej populacji, dynamikę (7) odróżniają od dynamiki (6) jedynie zmiany prędkości. W przypadku (7) ruch jest relatywnie szybki, gdy średnie wypłaty są relatywnie niskie. Natomiast w grach wielopopulacyjnych występują znacznie większe różnice w przebiegu procesu ewolucyjnego³².

Początkowo dynamikę replikatorów stosowano wyłącznie w badaniach biologicznych. Z licznych badań wiadomo jednak, że może ona również służyć jako narzędzie opisu zjawisk będących w orbicie zainteresowań przedstawicieli nauk społecznych³³. Należy wtedy przyjąć, że u podstaw zmian ewolucyjnych nie leży zmienność genetyczna, lecz na przykład

³⁰ P. D. Taylor, L. B. Jonker, *Evolutionarily stable strategies and game dynamics*, „Mathematical Biosciences” 1978, nr 1–2, s. 145–156.

³¹ Znajduje ona zastosowanie, gdy wypłaty poszczególnych graczy są nieujemne, a średnia wypłata dodatnia. W literaturze można znaleźć również nazwę: skorygowana dynamika replikatorów. J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge 1982.

³² W. H. Sandholm, *Population Games and Evolutionary Dynamics*, Cambridge 2010, s. 156–158.

³³ Zob. np.: D. G. Arce, T. Sandler, *An evolutionary game approach to fundamentalism and conflict*, „Journal of Institutional and Theoretical Economics” 2003, nr 1, s. 132–154; H. Li, Ch. Wu, M. Yuan, *An evolutionary game model of financial markets with heterogeneous players*, „Procedia Computer Science” 2013, nr 17, s. 958–964.

imitacja zachowań (norm, postaw) o wyższej użyteczności³⁴. W ujęciu tym dynamika replikatorów Maynarda Smitha stanowi jeden z podstawowych przykładów dynamiki imitacyjnej.

Założmy, że przedmiotem analiz będą interakcje zachodzące w obrębie populacji tworzonej przez elitę polityczną hipotetycznego państwa X. Populacja ta jest względnie jednorodna i na tyle liczna, że procesy w niej zachodzące można rozpatrywać w kategoriach statystycznych. Ponadto populacja ta jest nieprzestrzenna, co oznacza, że w każdej chwili każdy gracz może wejść z takim samym prawdopodobieństwem w interakcję z każdym innym graczem³⁵. Uczestnicy gry³⁶ dokonują niezależnie od siebie wyboru jednej z dwóch strategii: *W* – współpraca w próbie zneutralizowania wspólnego wroga lub *OW* – odmowa współpracy w walce przeciwko osobie zagrażającej pozycji obojga graczy. Gracze obserwują, która ze strategii przynosi średnio wyższą użyteczność i ją naśladowują. Poniższa macierz zawiera wypłaty wynikające z gry *W* lub *OW*.

	<i>W</i>	<i>OW</i>
<i>W</i>	9	0
<i>OW</i>	3	3

W grze możliwe są następujące kombinacje strategii:

- (*W*, *W*) – gracze podejmują wspólne działania, w wyniku czego agresor zostaje trwale unieszkodliwiony;
- (*W*, *OW*) – gracz wierszowy współpracuje, gracz kolumnowy działa na własną rękę; w efekcie ten pierwszy niczego nie uzyskuje, ten drugi jedynie oddala zagrożenie w czasie;
- (*OW*, *W*) – gracz wierszowy podejmuje działania samodzielnie, a gracz kolumnowy współpracuje;
- (*OW*, *OW*) – w obawie przed zdradą potencjalnego sojusznika politycy działają samodzielnie; każdy z nich jedynie oddala zagrożenie w czasie.

Gra ma dwie symetryczne równowagi Nasha w strategiach czystych: (*W*, *W*) i (*OW*, *OW*) oraz jedną symetryczną równowagę Nasha w stra-

³⁴ Różnice w przebiegu procesu ewolucyjnego determinują konieczność odmiennej interpretacji wypłat. W grach biologicznych są one rozpatrywane w kategoriach przystosowania mierzonego liczbą potomstwa dziedziczącego strategię rodziców. W grach społecznych mówić będziemy o użyteczności wynikającej z gry określoną strategią.

³⁵ Model zakłada zachodzenie interakcji w czasie ciągłym.

³⁶ Będzie to gra o schemacie interakcji: polowanie na jelenia.

tegiach mieszanych (σ^* , σ^*), gdzie $\sigma^* = \frac{1}{3}W + \frac{2}{3}OW$. Jedynie równowaga (W , W) jest paretooptymalna, dlatego stanowi ona pożądane rozwiązanie gry.

Analizowany model ma dwie strategie ewolucyjnie stabilne: W i OW . Użyteczność wynikająca z gry strategią W wynosi:

$$9 \cdot x + 0 \cdot (1-x) = 9x, \quad (8)$$

a strategią OW :

$$3 \cdot x + 3 \cdot (1-x) = 3. \quad (9)$$

Zatem średnia użyteczność całej populacji to:

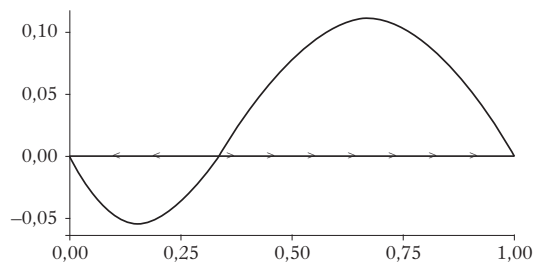
$$x \cdot 9x + (1-x) \cdot 3 = 9x^2 - 3x + 3. \quad (10)$$

Finalnie równanie dynamiki replikatorów Maynarda Smitha przyjmie postać:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x[9x - (9x^2 - 3x + 3)]}{9x^2 - 3x + 3} = \frac{-9x^3 + 12x^2 - 3x}{9x^2 - 3x + 3}. \quad (11)$$

Odzwierciedlenie graficzne dynamiki replikatorów Maynarda Smitha omawianej gry zawiera rysunek 2.

Rysunek 2. Dynamika replikatorów Maynarda Smitha



Na osi odciętych został odłożony udział strategii W w populacji, a na osi rzędnych – $\frac{dx}{dt}$. Wykres wykonano przy użyciu programu R.

Źródło: opracowanie własne.

Na wykresie fazowym znajdują się trzy punkty krytyczne (równowagi), w których populacja przyjmuje postać statyczną: $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$ i $x = 1$. Po osiągnięciu pierwszego punktu populacja jest złożona wyłącznie z polityków grających strategią OW, drugi punkt oznacza stan, w którym $\frac{1}{3}$ uczestników gry wybiera W, a $\frac{2}{3}$ wybiera OW, natomiast w punkcie trzecim wszyscy politycy grają strategią W. Jedynie równowagi $x = 0$ i $x = 1$ są asymptotycznie stabilne, z kolei równowaga $x = \frac{1}{3}$ odznacza się niewielką odpornością nawet na niewielkie zaburzenia. Stanowi ona wartość graniczną, po przekroczeniu której populacja będzie ewoluować w stronę alternatywnej równowagi asymptotycznie stabilnej.

Analizowany model stanowi daleko idącą idealizację. W związku z tym może być on konkretyzowany przez: dodanie kolejnych strategii, uwzględnienie większej liczby populacji, zastosowanie innych dynamik selekcyjnych, np. przewidujących możliwość popełniania losowych błędów w imitacji bądź przewidujących zachodzenie interakcji w czasie dyskretnym.

Zakończenie

W artykule omówiono zarówno kluczowe zagadnienia teoretyczne związane z modelowaniem matematycznym zjawisk politycznych, jak i przykładowe sposoby wykorzystania modeli matematycznych w praktyce badawczej. Przy użyciu metody regresji nieliniowej opisano dynamikę wzrostu realnego światowego PKB. Natomiast stosując narzędzia teorii gier ewolucyjnych, prześledzono proces transmisji zachowań kooperacyjnych wśród elit politycznych.

Modele są uproszczonymi reprezentacjami obserwowanych zjawisk. Na wstępnym etapie analiz w każdym modelu zostają pominięte szczegóły oraz cechy uznane przez badaczy za nieistotne. W toku postępów badawczych zredukowany model może ulegać konkretyzacji przez uchylanie kolejnych założeń idealizujących. Wariant skonkretyzowany uzyskuje czasową akceptację, jeśli wyjaśnia obserwowane fakty z lepszym przybliżeniem.

Modelowaniu podlegają struktury zarówno materialne, jak i niematerialne. Do pierwszych możemy zaliczyć np. gwiazdy czy planety, a do drugich – języki naturalne. Modele w początkowych fazach projektowania są jedynie konstruktami myślowymi, a w postaci finalnej mogą być

wyrażone przez obiekty charakteryzujące się określonymi parametrami fizycznymi (modele materialne) lub przez określone symbole i pojęcia (modele abstrakcyjne).

Kluczową grupę modeli abstrakcyjnych tworzą modele matematyczne. Stosowanie ich może być podyktowane względami poznawczymi oraz przesłankami estetycznymi. Oprócz niezwyklej precyzji, spójności, intersubiektywnej komunikowalności i intersubiektywnej weryfikowalności modele matematyczne odznaczają się także elegancją zapisu i prostotą. Dzięki tym cechom znajdują coraz szersze zastosowanie także w tych dziedzinach nauki, w których do tej pory powątpiewano w ich przydatność. Mimo wielu zastosowań w często skrajnie odległych obszarach badawczych oraz ewidentnych korzyści w poznawaniu, projektowaniu i doskonaleniu i systemów empirycznych, i systemów abstrakcyjnych modele matematyczne mają jednak swoich przeciwników. Zgodnie z najczęściej przywoływaną opinią zbyt redukcją złożoną rzeczywistość, wskutek czego tracimy wiele z bogactwa i różnorodności badanych zjawisk.

STRESZCZENIE

Celem artykułu jest zwięzła prezentacja zarówno kluczowych zagadnień teoretycznych związanych z modelowaniem matematycznym w politologii, jak i wybranych przykładów użycia modeli matematycznych w praktyce badawczej. Na początku rozważań omówiono funkcje, jakie pełnią modele naukowe w procesie tworzenia teorii naukowych, oraz wskazano główne typy modeli naukowych. Następnie scharakteryzowano wybrane elementy teorii modeli matematycznych oraz wskazano najczęściej występujące nieporozumienia na temat stosowania języka matematyki w badaniach politologicznych. W części wieńczącej rozważania podano wybrane przykłady wykorzystania modeli matematycznych w badaniach zjawisk politycznych. Zbudowano kwadratowo-hiperboliczny model dynamiki wzrostu realnego światowego PKB oraz teoriogrowy model transmisji zachowań kooperacyjnych wśród elit politycznych. Do ich budowy użyto programu R.

Mateusz Wajzer

MATHEMATICAL MODELS IN POLITICAL SCIENCE – THEORETICAL FOUNDATIONS AND SAMPLE USES

The purpose of the paper is to present in a concise manner the key theoretical issues related to mathematical modelling in political science, alongside selected examples of using mathematical modelling in research practice. In the process, the function of scientific models in the development of scientific theories is discussed, indicating the main types of scientific models. Then, selected elements of the theory of mathematical models are considered and the most common misunderstandings in using the language of mathematics in political science studies are described. Finally, selected examples of using mathematical models in studies of political phenomena are presented: a quadratic-hyperbolic model of the real global GDP growth dynamics and a game theory model of the transmission of cooperative behaviours among political elites were developed. The R programme was used to build the models.

KEY WORDS: *mathematical models, political science, regression analysis, game theory*

Bibliografia

- Andreski S., *Czarnoksięstwo w naukach społecznych*, Warszawa 2002.
- Arce D. G., Sandler T., *An evolutionary game approach to fundamentalism and conflict*, „Journal of Institutional and Theoretical Economics” 2003, nr 1.
- DeLong J. B., *Estimates of World GDP, One Million B.C. – Present*, 1998, http://delong.typepad.com/print/20061012_LRWDGDP.pdf (dostęp: 06.01.2019).
- Downs A., *An Economic Theory of Democracy*, New York 1957.
- Dörner D., *Modellbildung und Simulation*, [w:] E. Roth (red.), *Sozialwissenschaftliche Methoden*, München 1984.
- Fiorina M. P., *Formal models in political science*, „American Journal of Political Science” 1975, nr 1.
- Grinin L. E., Markov A. V., Korotayev A. V., *Mathematical modeling of biological and social evolutionary macro-trends*, [w:] L. E. Grinin, A. V. Korotayev (red.), *History and Mathematics: Trends and Cycles*, Volgograd 2014.
- Grobler A., *Metodologia nauk*, Warszawa 2006.
- Korotayev A. V., Grinin L. E., *Global urbanization and political development of the world system*, [w:] L. E. Grinin, I. Ilyin, A. V. Korotayev (red.), *Globalistics and Globalization Studies*, Moscow–Volgograd 2012.
- Krauz-Mozer B., *Teorie polityki. Założenia metodologiczne*, Warszawa 2005.
- Li H., Wu Ch., Yuan M., *An evolutionary game model of financial markets with heterogeneous players*, „Procedia Computer Science” 2013, nr 17.
- Maynard Smith J., *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge 1982.
- McEvedy C., Jones R., *Atlas of World Population History*, London 1979.

- Muciek A., *Wyznaczanie modeli matematycznych z danych eksperymentalnych*, Wrocław 2012, http://www.dbc.wroc.pl/Content/19612/muciek_wyznaczanie_modeli.pdf (dostęp: 06.01.2019).
- Newton I., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londini 1687, <http://www.gutenberg.org/files/28233/28233-pdf> (dostęp: 06.01.2019).
- Nikitin E., *Wyjaśnianie jako funkcja nauki*, Warszawa 1975.
- Nowak L., *O ukrytej jedności nauk społecznych i nauk przyrodniczych*, „Nauka” 1998, 1, <http://www.staff.amu.edu.pl/~epistemo/Nowak/przyrhum.pdf> (dostęp: 06.01.2019).
- Nowak S., *Metodologia badań społecznych*, Warszawa 2008.
- Pabis S., *Metodologia i metody nauk empirycznych*, Warszawa 1985.
- Riker W. H., Ordeshook P.C., *A theory of the calculus of voting*, „The American Political Science Review” 1968, nr 1.
- Sandholm W. H., *Population Games and Evolutionary Dynamics*, Cambridge, MA 2010.
- Suppes P., *The desirability of formalization in science*, „The Journal of Philosophy” 1968, nr 65.
- Sztumski J., *Wstęp do metod i technik badań społecznych*, Katowice 2005.
- Taylor P. D., Jonker L. B., *Evolutionarily stable strategies and game dynamics*, „Mathematical Biosciences” 1978, nr 1–2.
- Troitzsch K. G., *Modellbildung und Simulation in den Sozialwissenschaften*, Opladen 1990.